

“Mahkumun İkilemi Oyunu  
ve  
Oyun Teorisi: Temel Kavram ve Çözümlerin Tanitimi”

Birol Başkan

1. Taslak (Ocak-2001)
2. Taslak (Aralık-2002)

Dibace

Sosyal bilimlerde, hususiyetle Uluslararası İlişkiler literaturunde Mahkumun İkilemi oyunu çok siklikla kullanılmaktadır. Oyunun bir kez oynanmasından, sonsuz kez aynı kisiler tarafından oynanması durumuna kadar birçok varyasyonu değişik makalelerde karsımıza çıkmaktadır. Bu çalışma esas olarak, Mahkumun İkilemi oyununun bu değişik versiyonlarının çözümüne ayrılmıştır. Fakat bu durum bir fırsat bilinip, oyun teorisinin temel kavramları ve çok siklikla kullanılan çözüm metodları da tanıtılmıştır. Eksik bilgili oyunlarda kullanılan çözüm metodları başka bir çalışmaya veya bu çalışmanın bir sonraki güncellenmiş haline havale edilmiştir. İlk önce oyun teorisinin temel varsayımlarını kısaca tanıtacağız. Bu varsayımları filozofik duruş açısından tartışmaya açmak gerektiğine inanıyorum. Özellikle, aklın işlevine ilişkin varsayımın Kantçı içerikle veya aklın gerçek işlevine ilişkin daha doğru bir yaklaşımla genişletilmesi gerekmektedir. Tartışılması gereken diğer bir nokta ise, yapı ve birey arasındaki bağımsızlığın gerçeği ne ölçüde yansıttığıdır. İkinci bölüm oyun teorisinin tanıtılmasına ayrıldı. Üçüncü bölüm çözüm metodlarına ve son bölüm ise Mahkumun İkilemi oyununun çözümüne ayrıldı. İkinci ve üçüncü bölümler için, not düşülen kaynaklar haricinde, Michael Whinston'un ders notlarından yararlandım. Ayrıca, daha en bastan şahsi bir özürümü dile getirmek istiyorum. Oyun teorisinin temel kavramlarının Türkçe karşılıklarını halihazırda ki Türkçe ekonomi kelime hazinemizde bulamamaktayız. Bu son derece üzücü durum tabii ki, benim buradaki girişimimi olumsuz yönde etkilemiştir. Benim gibi anadili Türkçe olanlara ve güzel Türkçemiz'e bir özür borçluyum.

### 1. Oyun Teorisinin Temel Varsayımları

Oyun teorisi, iki veya daha çok birimin (kisi, kuruluş veya devlet olabilir) karşı karşıya geldikleri ve tercih ettikleri stratejilerin karşı tarafın tercih edeceği stratejiyi etkileyeceği durumlarda, birimlerin kararlarını belirleme sorunu ile ilgilidir. Bu uzun tanım biraz açalım. Ekonomi, sosyal bir bilim olarak, bireyin tekil olarak aldığı ekonomik kararlar ile ilgilidir. Bu tür kararlar, ekonomik bireyin, a priori varolduğu kabullenilen bir fayda fonksiyonunu bütçe kısıtı altında azamilestirmesi sonucu ortaya çıkar. Tekil olması, diğer ekonomik birimlerin aldığı kararlara etkisinin olmadığını veya diğer kararların kendi kararı etkisi olmadığını delâlet eder. Fakat hayat her zaman tek kişilik kararlar topluluğu değildir. Özellikle, stratejik durumlar olarak nitelendirilebileceğimiz durumlarda, ekonomik bireyin nasıl hareket edeceği, diğer

ekonomik bireylerin nasıl hareket edeceğine dair beklentisine bağlıdır. Bu tür örnekleri çoğaltmak mümkündür. Mesela, iki devletin birbirilerine karşı izleyeceği ticaret politikalarını belirlemeleri karşı tarafın nasıl belirlediğine bağlıdır. Diğer bir deyişle, bireyin fayda fonksiyonu 'state dependent' tir. Yani, diğer bireylerin nasıl karar verdiklerini ayrı birer sosyal durum olarak nitelendirirsek, bireyin alacağı fayda farklı karar ihtimallerine göre değişik değerler alabilmektedir. Bu durumda, birey karşı taraftaki bireyin nasıl karar aldığı ve hareket ettiğini hesaba katacaktır. Bu durumlarda, ekonomik bireyin nasıl hareket edeceğinin cevabını Oyun teorisi bize vermektedir. Tabii ki cevap, oyun teorisinin temel varsayımları çerçevesindedir. İlk olarak, oyun teorisi ile modellenen herhangi bir sosyal, politik veya ekonomik bir durumda karar alma durumunda olan birimlerin işlevsel olarak akıllı oldukları varsayılır.

## 1.2 İşlevsel Akılcılık

İşlevsel akılcılığın felsefi kökenini David Hume'un görüşleri oluşturmaktadır. (Heap and Varoufakis, 1995:7) Söyle der Hume, "Akil ve tutkunun çatışmasından bahsederken, tam anlamıyla ve felsefi olarak konuşmuyoruz. Akil, sadece tutkuların kölesi olmalıdır, ve onlara hizmet etmek ve itaat etmenin haricinde hiçbir makamda hak iddia etmemelidir."<sup>1</sup> Bu bağlamda akil, sadece bireyin tutkularını tatmin edecek yolların seçilmesine yarar. Oyun teorisinin işlevsel akılcılığı benzer şekilde, bireyin nihai amacının 'faydasını' azamileştirmek olduğunu kabullenir. Akil fayda azamileştirilmesinde kullanılan bir araç konumundadır.

Harsanyi (1966:619) oyun teorisinde kabullenilen akılcılığın iki yönüne işaret eder. Birincisi, dar anlamıyla akılcı davranış, ikincisi ise, akılcı beklentidir. Akılcı davranış, işlevsel olarak akıllı bireylerin faydalarını azamileştiren alternatifleri tercih edeceğini, ve sayet iki alternatif aynı seviyede fayda sağlıyorsa, iki alternatif arasında kararsız kalacağını öngörür.<sup>2</sup> Akılcı beklenti ise, bireylerin tercihlerini yaparken, karşılarındaki bireyleride işlevsel olarak akıllı bireyler olduğunu ve onların faydalarını azamileştirmeye çalıştıklarını hesaba kattıklarını öngörür. Akılcı beklenti bizi oyun teorisinin ikinci varsayımına götürür.

---

<sup>1</sup> David Hume, A Treatise On Human Nature,

### 1.3 Akilci Beklenti

Akilci beklenti varsayiminda üzerinde durulmasi gereken iki nokta vardir. Bunlardan ilki, oyunun katilimcilarinin birbirleri hakkında düsündükleri ile alakadardir. Herhangi bir birey akilci olarak yapıyorsa, karsisindaki bireyde ayni aksiyomlar dogrultusunda tercihlerini akilci olarak yapıyordur. Buna, karsilikli akilcilik beklentisi (Harsanyi, 1966) veya akilciligin genel bilinmesi (Heap & Varoufakis,1995) denebilir. Ikinci olarak, ayni bilgi setine sahip iki bireyin birbirlerinden bagimsiz olarak ayni sonuçlara ulasacagi kabullenilir. Bunun bir devami olarak, herhangi bir birey kendisini karsi tarafın yerine koydugu zaman akilci bulmadigi bir tercihi rakibinden beklenmemelidir. (Harsanyi, 1966:621). Buna simetrik beklenti (Harsanyi,1966) veya inançların tutarlıligi denebilir. (Heap & Varoufakis, 1995)

### 1.4 Oyunun Kurallari

Oyun teorisinin üçüncü varsayimi oyunun kurallarına iliskindir. Oyun katilimcilarinin oyunun kurallarını tam olarak bildikleri varsayilir. Bu kurallar bireyin tercih yapmak durumunda olduğu alternatifleri bilmesini ve herhangi bir alternatif neticesinde elde edebilecegi faydayı içerir. Oyunun kurallarına iliskin diger bir varsayim ise, oyunu olusturan yapı ve tercihler arasındaki bagimsizlikle ilgilidir. Yani, birey tercihlerini yaparken, oyunu belirleyen yapıdan etkilenmez. (Heap & Varoufakis, 1966) Dolayısıyla, bireyin tercihlerini belirleyen tek etken, tercihi neticesinde elde edeceği faydadır. Oyun teorisi ile modellenen herhangi bir durumda, yapı oyunun kurallarını belirler ve tercihler üzerine sınırlamalar getirir. Diger bir söyleyle, oyun teorisi bu sartlar altında olusturulur ve bu sartlar altında en akilci hareket tarzının çözümlemesi ile ilgilenir.

---

<sup>2</sup> Akilci davranışın formal gösterimi başlı başına bir konudur. Bu konudaki en klasik referans belki de David Kreps'in 'Notes on The Theory of Choice' isimli kitabidir. Amartya Sen'in 'Collective Choice and Social Welfare' in ilk chapteri tercih ilişkilerininin formal gösterimi üzerinde klasik referanstır.

## 2. Oyunun Modellenmesi

Oyun teorisinde genel bir sınıflandırma ile iki tür oyun vardır : işbirlikçi oyunlar ve işbirlikçi olmayan oyunlar. İki tür oyun arasındaki temel fark, işbirlikçi oyunlarda oyun katılımcıları tarafından verilen taahhütlerin oyuncuyu bağlayıcı özelliği olmasıdır. Öte yandan işbirlikçi olmayan oyunlarda ise, oyuncunun herhangi bir tercihe yönelik taahhütünün bağlayıcılığı yoktur. (Harsanyi, 1966:616) Hobbes'un söylediği gibi, "Kılıç olmaksızın, sözleşmeler sadece kelimelerdir ve bir insani emin kilmek için hiçbir güçleri yoktur."<sup>3</sup> İşbirlikçi olmayan oyunlarda oyuncuların işbirliği yapmaları durumunu, işbirlikçi oyunlarla karıştırmamak gerekir. İlkinde elde edilen işbirliği, oyuncularının menfaatlerinin birlikteliğinin sonucudur. Yani oyuncuların işbirliğinden menfaatleri vardır. (Kreps, 1990:9) Mahkumun İkilemi İşbirlikçi olmayan bir oyundur. Dolayısıyla, tanıtım doğal olarak kısıtlandı.

### 2.1 Oyun

Herhangi bir oyunun 3 temel elemanı vardır: oyuncuların oluşturduğu set  $N$ , strateji seti  $S$ , ve her oyuncu için getiri fonksiyonu. Getiri fonksiyonu bize her bir strateji için belirli bir rakamsal fayda değeri vermektedir. Yani,

Oyuncu herhangi bir oyunda alternatif stratejiler arasından seçim yapmak durumunda olan ve diğer oyuncularla birlikte kararlarını faydasını azamilestirecek şekilde alan bireydir. Oyuncular kararlarını alırken, karşı taraftaki oyuncunun tercihinden etkileneceği ve bu etkilenmenin farkında olduğu için stratejik hareket ederler.

Strateji, oyuncunun karşı karşıya kaldığı karar alternatiflerini belirler. İki çeşit strateji vardır : tekil stratejiler,  $s_i \in S_i$ , ve karıştırılmış stratejiler,  $\mathbf{s}_i \in \Sigma_i$ . Tekil stratejiler herhangi bir oyuncunun kesin bir şekilde belirleyebildiği stratejilerdir. Karıştırılmış stratejiler ise oyuncunun tekil stratejilere rastgele belirlediği olasılık dağılımıdır. Oyuncular her bir tekil strateji için rastgele olasılık değerleri belirlerken, karşı taraftaki oyuncudan bağımsız olarak hareket eder.  $\mathbf{s}_i(S_i)$  herhangi bir oyuncu tarafından strateji seti üzerinde belirlediği olasılık dağılımını göstermektedir.

Oyuncular tekil stratejiler için rastgele olasılık değerlerini birbirlerinden bağımsız olarak belirlerken, bu olasılık değerlerinin diğer oyuncular tarafından bilinmediğini kastetmiyoruz. 'Akılcılığın herkes tarafından bilinmesi' varsayımı çerçevesinde, bir oyuncunun tekil stratejiler için belirlediği olasılık değerleri diğer oyuncu tarafından bilinmektedir. Dolayısıyla, 'inançların tutarlılığı' varsayımı doğrultusunda aynı

---

<sup>3</sup> Hobbes, Leviathan

durumla karsilasan iki birey ayni sonuclari cikardigi gibi, ayni olasilik degerlerini belirlemesi gerekir. (Heap & Varoufakis, 71) <sup>4</sup>

Getiri, herhangi bir oyuncunun karsi karsiya kaldigi alternatif kararlar neticesinde elde edecegi faydadir. Oyuncunun amaci, her oyunda elde edecegi faydayi azamilestirmektir. Belirli bir oyuncunun herhangi bir tekil strateji seçiminden elde edecegi fayda,  $u_i(s_i, s_{-i})$  seklinde gösterilir. Diger bir tanimlamayla,  $u_i : S_1 \times \dots \times S_n \rightarrow \mathfrak{R}$ . Bir strateji veya faydanin herhangi bir oyuncuya ait oldugu 'i' ile gösterilirken, karsisindaki oyuncularin stratejileri için '-i' kullanılacaktır.  $s_i$  karistirilmis strateji profilini tercih eden bir oyuncunun getiri fonksiyonu ise,

$$U_i(\mathbf{s}_i, \mathbf{s}_{-i}) = \sum_{(s_1, \dots, s_n) \in \prod_{i \in N} S_i} (s_1(s_1), \dots, s_n(s_n)) u_i(s_1, \dots, s_n) U_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) .$$

Özetlersek, Oyun, (i) herbir oyuncunun alternatif kararlar arasindan seçim yapmasi, (ii) seçimini kendi faydasini azamiles tirecek sekilde gerçektirmesi ve (iii) seçimini yaparken karsi taraftaki oyuncununda benzer sekilde hareket edecegini öngörmesi durumunu modellendirir.

## 2.2 Gösterim

Herhangi bir oyun iki sekilde gösterilebilir: Normal gösterim ve yaygin gösterim. Geleneksel olarak normal gösterim iki oyuncunun ayni anda karar verdikleri tek asamali oyunların modellenmesinde kullanilir. Yaygin gösterim ise modellenen oyunun birden fazla asama içermesi halinde kullanilir.<sup>5</sup>

Figür 1'de yazi tura oyununun normal gösterimi çizilmiştir. Oyuncularımız, Ali ile Veli. Ve strateji setleri iki seçenek içermektedir. Yani,  $N = \{Ali, Veli\}$  ve  $S_i = \{T, Y\}$ ,  $i \in N$ . İki oyuncuda ayni anda T veya Y seçeneklerinden birisini tercih eder. Sayet ikiside ayni ise, Veli Ali'ye 1 kurus verir. Farkli tercihlerde tam tersi durum geçerlidir. Standart kullanima sadik kalarak, satirlar Veli'nin stratejilerini, sütunlar ise, Ali'nin stratejilerini göstermektedir. Herbir hücredeki, birinci rakam Veli'nin faydasini, ikinci rakam Ali'nin faydasini göstermektedir. Oyun sifir toplamlidir, yani oyuncunun birisinin kaybettigi digerinin ise kazandigi durumları yansitmaktadır.

<sup>4</sup> Çok tartisilmasi gereken bir varsayim.

<sup>5</sup> Çok asamalar oyun'un formal tanimini, yaygin gösterimde çözümleme metodlarının tanitildiği, 1.4.2 bölümünde vereceğiz.

		Ali	
		T	Y
Veli	T	+1,-1	-1,+1
	Y	-1,+1	+1,-1

Figur 1

Bu oyundaki her iki oyuncu içinde karistirilmis stratejilerini bulalim. Veli'den baslayalim. Veli, strateji setindeki seçeneklere verecegi olasilik degerlerini, diger oyuncunun tekil stratejilerinden elde edecegi beklenen getirileri esitleyerek belirler. Yani,

Veli'nin  $s_v = (s_v(T), s_v(Y))$  tercihi,  $U_A(T, s_v) = U_A(Y, s_v)$  esitliginin çözüdür.

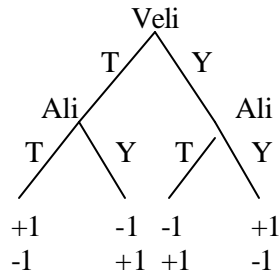
$s_v(T) = 1 - s_v(Y)$  olduğunu hemen not edelim. Dolayisiyla,

$$s_v(T)(-1) + (1 - s_v(T))(1) = s_v(T)(1) + (1 - s_v(T))(-1). \quad \text{Cozum} \quad \text{bize,}$$

$s_v(T) = s_v(Y) = 1/2$  verir.

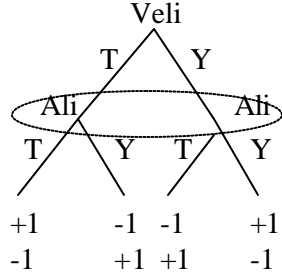
Simetri argümanıyla, Ali'nin karistirilmis stratejisinin  $s_A = (1/2, 1/2)$  olduğunu söyleyebiliriz.

Asagida ayni oyunun yaygin gösterimini çizilmiştir. Yaygin gösterimde kimin önce tercih yaptigi önemlidir. Asagida Veli'nin önce hareket ettiği durum gösterilmektedir. Baslangıç noktasından çıkan dallar, Veli'nin stratejilerini göstermektedir. Daha sonraki ayrimda ise, Ali'nin stratejileri gösterilmiştir. Oyuncuların strateji seti de degismistir. Veli'nin  $S_v = \{T, Y\}$  olarak ayni kalırken, Ali için her bir karar noktasındaki tercih seçeneklerini hesaba katacak şekilde genişlemiştir. Bu yeni durumda,  $S_A = \{(T, T), (T, Y), (Y, T), (Y, Y)\}$  olarak Ali'nin strateji seti 4 elemanlidir. Dal sonundaki parantez içindeki rakamlardan üsteki ilk hareket eden oyuncunun, alttaki rakam ise, ikinci tercihi yapan oyuncunun faydasini göstermektedir.



Asagidaki figürde ayni oyunun eszamanli olarak oynanmasi durumunda ve yaygin gösterimde temsil edilmesi durumunu göstermektedir. Ali ile Veli'nin ayni anda karar verdiklerini gösterebilmek için, Ali'nin hareket noktaları eliptik bir daire içine

almıştır. Bu daire Bilgi seti olarak isimlendirilir. Bilgi setinin bulunduğu asama alt-oyunu oluşturur. Alt-oyun yaygın gösterimle modellenen bir oyunun alt bölümüdür. Bir alt oyunun başlangıcı, aynen oyunun tamamında olduğu gibi, tek bir noktadır. Bu tek noktadan çıkan strateji dalları ve her strateji kümesinin getirileri alt-oyunun elemanlarını oluştururlar. (Heap & Varoufakis, 82)



### 3. Çözümleme

Bu bölümü, Normal gösterimde ve Yaygın gösterimde çözümleme metodları olarak iki bölüme ayırdık. İlk önce Normal gösterimde çözümleme metodlarını, daha sonra Yaygın gösterimde çözüm metodlarını tartışacağız.

#### 3.1 Normal Gösterimde Çözümleme

##### Baskınlık Argümanı

Normal gösterimin en basit çözümleme metodu, Baskınlık argümanıdır. Karşı taraftaki oyuncu neyi tercih ederse etsin, her durumda herhangi bir strateji diğer bütün stratejilerden daha fazla fayda sağlıyor ise, o strateji baskın stratejidir. Formal olarak tanımlayalım.

Tanım : Oyuncunun seçeneklerden birisi, mesela  $s_i^*$ , diğer her stratejiden  $s_i \in S_i$  her durumda daha fazla fayda sağlıyor ise, diğer bir deyişle

$$u_i(s_i^*, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

esitsizliğini sağlıyorsa,  $s_i^*$  kuvvetli baskın stratejidir.

Sayet,  $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$  ve  $u_i(s_i^*, s_{-i}) = u_i(s_i, s_{-i}), \exists s_{-i} \in S_{-i}$  ise,  $s_i^*$  zayıf baskın stratejidir.

Oyuncu karşı tarafın nasıl oynadığına ilişkin bir akıl yürütme gerçekleştirmeksizin, 'baskın' stratejiyi belirler. Bir örnekle açıklayalım.

		Ali	
		B	A
Veli	B	2,2	0,3
	A	3,0	1,1

Figür 2

Figür 2'den gözlemlendiği gibi, Ali için A B'den daha üstündür. Çünkü, Veli'nin A veya B stratejilerinden hangisini seçtiğine bakmaksızın, Ali A'yi seçmesi durumunda, her zaman daha fazla getiri elde edecektir. Aynı şekilde, Veli A'yi seçmesi durumunda, Ali'nin tercihinden etkilenmeksizin, her zaman getirisi daha yüksek olacaktır.

Yani,  $u_i(A, s_{-i}) > u_i(B, s_{-i}), i=Ali, Veli$

Baskınlık argümanı, bazen doğrudan kullanılamaz. Bazı durumlarda, baskın strateji bütün stratejilerden değil, sadece bir veya birkaç tanesinden daha üstün olmayabilir. Örnek olarak, figür 3'te temsil edilen oyunu inceleyelim ve çözüme ulaştıracak düşünce silsilesini takip edelim.

		Ali		
		L	M	R
Veli	U	4,5	0,3	3,4
	M	2,0	5,1	2,2
	D	3,1	3,2	1,5

Figur 3

1- Ali için, M stratejisi R stratejisi tarafından bastırılmıştır.

$$u_A(R, s_{-i}) > u_A(M, s_{-i}), s_{-i} = U, M, D$$

2. Ali'nin M stratejisini tercih etmeyeceğini bilen Veli için en iyi strateji U stratejisidir, zira M stratejisi olmadığında, U stratejisi hem M'ye, hemde D'ye baskındır.

$$u_V(U, s_{-i}) > u_V(M, s_{-i}), s_{-i} \neq M$$

$$u_V(U, s_{-i}) > u_V(D, s_{-i}), s_{-i} \neq M$$

3. Veli'nin U stratejisini seçeceğini bilen Ali L stratejisini seçer, zira Veli'nin U'yu seçtiği bilindiği durumda, L R'ye baskındır.

$$u_A(L, U) > u_A(R, U)$$

Oyunun çözümü: Veli U'yu, Ali L'yi tercih eder.

Birbiri ardına bastırılan stratejilerin yok edilmesini içeren bu çözümleme metoduna 'bastırılmış stratejilerin ard arda elenmesi metodu' adı verilir (Füdenberg & Tirole, 6).

Formal olarak tanımlayalım.

Tanım :  $S_i^0 \equiv S_i$  ve  $\Sigma_i^0 \equiv \Sigma_i$  olsun.

$S_i^n = \{s_i \in S_i^{n-1} \mid \forall s_{-i} \in S_{-i}^{n-1} \text{ için, } u(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}) \text{ eşitsizliğini sağlayan karıştırılmış strateji, } \sigma_i \in \Sigma_i^{n-1} \text{ yoktur.}\}$

$\Sigma_i^n = \{\sigma_i \in \Sigma_i \mid \text{herhangi bir } s_i \in S_i^n \text{ in olasılık değeri pozitifdir, } \sigma_i(s_i) > 0 \}$

Herhangi bir oyuncunun bastırılan stratejilerin ard arda yok edilmesi sonucu ortada kalan tekil stratejilerinin dizisi,

$S_i^\infty = \bigcap_{n=0}^\infty S_i^n$  'dir.

$\Sigma_i^\infty$ , bütün  $\sigma_i$  strateji profillerini kapsayan settir. Bu set için,  $\forall s_{-i} \in S_{-i}^\infty$ ,  $u(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(\sigma_i, s_{-i})$  eşitsizliğini sağlayan  $\sigma_i$ ' stratejisi yoktur. (Füdenberg & Tirole, 45)

Bir noktayı not etmekte fayda var. Ard arda elenen bastırılmış stratejilerden bazıları zayıf baskın strateji ise, eleme sırası sonucu etkileyebilir. Nereden elenmeye başlandığı, kuvvetli baskın stratejinin varlığında sonucu etkilemez.

Akileştirilebilir Stratejiler

Buraya kadar görmüş olduğumuz stratejiler oldukça özel durumlarda geçerlidir. Genellikle hayattaki problemlerin çözümü bu kadar kolay olmayabilir. Örnek olarak figür 4'e bakalım.

		Ali			
		1	2	3	4
Veli	A	0,1	2,5	7,0	0,1
	B	5,2	3,3	5,2	0,1
	C	7,0	2,5	0,7	0,1
	D	0,0	0,2	0,0	10,-1

Figür 4

Figür 4'te temsil edilen oyunda, tekil bir strateji tarafından bastırılmış bir strateji yoktur. Fakat, Ali için 4 strateji olarak hiçbir zaman 'en iyi karşılık' değildir. Zira, Ali 2 ve 3 arasında (1/2,1/2) olasılık dağılımı yapsa, 4 stratejisinden ortalama olarak daha fazla fayda sağlayacaktır. Yani, 4 karıştırılmış bir strateji tarafından bastırılmıştır. Ve karıştırılmış veya tekil bir strateji tarafından bastırılan bir strateji hiçbir zaman en iyi karşılık değildir. Dolayısıyla, Ali'nin 4'ü tercih etmesi söz konusu olamaz. Bu bilindiğinde, Veli'de D'yi eleyebilir, zira D ancak Ali 4'ü tercih ettiğinde en iyi karşılıktır. Geriye kalan stratejiler aklilestirilebilir stratejilerdir. Yani herhangi bir strateji karşı oyuncunun oynayabileceği herhangi bir stratejiye en iyi karşılıktır. Aklilestirilebilir stratejiler söz konusu olduğunda, oyuncuların birisinin herhangi bir stratejiyi tercih etmesi için akilci bir zincirleme mantık silsilesi kurulabilir. Mesela, Veli A stratejisini aklilestirebilir. A 3'e en iyi karşılıktır. 3 C'ye en iyi karşılıktır, gibi. Aklilestirilebilir stratejiler, oyuncuların seçeceği herhangi bir alternatifi tercih etmesi için mantiki bir silsile kurulabilmesi gerektiğini sürer. Öte yandan bu örnekte de görüldüğü gibi, aklilestirilmiş stratejilerde dahil, şu ana kadar görmüş olduğumuz çözüm metodlarıyla sadece 1 tane stratejiyi eleyebildik. Dolayısıyla, daha fazlasına ihtiyacımız olduğu açıktır. Bir sonraki çözüm metodu, Nash çözümü bu ihtiyaca cevap vermektedir.

#### Denge Analizi ve Nash Stratejileri

Denge analizinin, belkide oyun teorisinin, en önemli ismi şüphesiz, 1950, 1951 ve 1953 seri halinde yayınladığı makaleleriyle Nash dengesi kavramını geliştiren, John Nash'tir. Nash dengesi, işlevsel akilcilik, akilci davranış ve akilci beklenti varsayımlarının tamamını gerektirmektedir.

Tanim : Herhangi bir strateji,  $s_i^* \in S_i$  veya  $\sigma_i^* \in \Sigma_i$ , sayet  $\forall i \in P$  ve  $\forall s_{-i} \in S_{-i}$ ,  $u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i})$  sartini sagliyorsa, Nash dengesidir. (Füdenberg & Tirole, 11)

Öncelikle, Nash dengesi, herbir oyuncu için belirlenen bir strateji dizisidir. Bu dizideki stratejiler oyuncular tarafından seçildiği durumda, herhangi birisi o stratejiden vazgeçme eğilimi içerisine girmez. (Kreps, 28) Herhangi bir oyuncu Nash stratejisini belirlerken, karsısındaki oyuncunun tercih edeceği stratejiye ilişkin beklentisinde yanlısı düşmez. (Heap & Varoufakis, 53)

Nash dengesinin nasıl elde edildiğini bir örnekle açıklayalım. Figür 4'ün herhangi bir hücresinden başlayalım. (A,1) olsun. A 1'e karşı iyi bir karşılık midir? Hayır. Zira, Ali'nin 1'i oynaması durumunda, Veli için yapılacak en iyi şey, C'yi tercih etmektir. Aynı şekilde, (C,1) i inceleyelim. Veli'nin C yi tercih etmesi durumunda, Ali için en iyi seçenek 1 midir? Hayır. Bu durumda Ali, 3'ü tercih edecektir. Bu şekilde devam edilirse görülecektir ki, (B,2) haricindeki hiçbir hücrenin Nash dengesi olma şartını sağlaması mümkün değildir. Zira, oyuncular denge noktasına ulaşmış olsalardı, denge tanımının gereği, o hücreden ayrılmak istemeyeceklerdi. Öte yandan, Ali'nin 2'yi tercih edeceği bilindiğinde, Veli için yapılacak en iyi tercih, B'dir. Aynı şekilde, Veli'nin B'yi tercih edeceği bilindiği vakit, Ali'nin yapacağı en iyi şey 2'yi tercih etmektir. Dengenin tanımı da budur. <sup>6</sup>

Nash, bazı şartları sağlayan her oyunun mutlaka Nash dengesinin olduğunu ispatlamıştır. Bu şartlar, i) strateji uzayının boş küme olmaması, kompakt ve konveks olması, ii) getiri fonksiyonunun sürekli olması ve bireyin kendi strateji seti için quasiconcave olmasıdır. Nash'in ispatının esası sudur. Herhangi bir oyunda her oyuncu için, en iyi karşılık fonksiyonunu bulmak mümkündür. Zira, bu fonksiyonu (aslında correspondance) şöyle tanımlıyoruz:

$b_i(S_{-i}) = \{s_i \in \Sigma_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}) \forall s'_i \in \Sigma_i\}$ . İspat  $b_i$ 'in yukarıdaki şartları altında, konveks, upperhemicontinuous ve boş küme olmadığının gösterilmesinden ibarettir. Daha sonraki aşama, Kakutani Sabit nokta teoremini kullanmaktır. Zira, sabit nokta teoremi bize, bir stratejinin varlığını söyler. Bu stratejinin özelliği,  $s \in b(S)$  dir.

<sup>6</sup> Nash çözümlemesi, birden fazla dengenin olduğu durumlarda, hangi denge noktasının tercih edileceğine ilişkin olarak yol göstermez. Birden fazla Nash dengesinin olması, veya hiç Nash dengesinin olmaması, denge analizinin zayıf noktasıdır. Aynı yorum, 'baskınlık argümanı' içinde geçerlidir. John Nash'ten sonra ki, oyun teorisi çalışmaları, Nash çözümlemesinin bu eksikliğini gidermeye yönelik olarak geliştirilmiştir. Fakat, Kreps'in de itiraf ettiği gibi, yapılan çalışmalardan hiçbirisi tatmin edici bir cevap verememiştir. (Kreps,1990:30) Bu çalışmada 'oyun teorisinin' tanıtılması, araştırma konumuzla sınırlandırıldığı için, Nash dengesinin geliştirilmesine yönelik çalışmalardan bahsedilmeyecektir.

$b(S) = b_1(S_{-1}) \times \dots \times b_n(S_{-n})$  ve  $s = (s_1, \dots, s_n)$ . Fakat bu Nash dengesinin tanimindan baska birsey degil.

Son nokta olarak, gerek baskinlik argümanı gerekse baskin stratejilerin ardarda elenmesi stratejisi sonucu elde edilen çözümle, 'Nash dengesi arasındaki ilişki tek taraflıdır. Söyle ki, baskinlik argümanı baskin stratejilerin ardarda elenmesi stratejisi sonucu elde edilen çözüm tek ise, o çözüm Nash Dengesidir (Füdenberg & Tirole, 13). Fakat tersi doğru olmayabilir.

Nash, denge stratejinin varlığını ispat etmiştir. Öte yandan, ispatı dengenin tekliğine ilişkin bir fikir vermez. Herhangi normal gösterimdeki bir oyunun birden fazla dengesinin olması mümkündür. Ve Nash dengesi, bu iki denge noktasından hangisinin seçileceğine ilişkin olarak herhangi bir fikir vermemektedir. Aşağıdaki örneği ele alalım.

		Ali		
		A	b	c
Veli	A	2,2	1,1	0,0
	B	0,0	1,1	1,1
	C	0,0	0,0	0,1

Yukarıda normal gösterimde temsil edilen oyunun birden fazla Nash dengesi vardır: (A,a), (B,b) ve (B,c). Bu tür durumlarda, Nash dengesi sayısını azaltabilmek için Selten tarafından "titreyen el mükemmel Nash dengesi" kavramı geliştirilmiştir. İlk önce tanımlayalım. Daha sonra da, örnek olarak (B,c) nin tanımı sağlayıp sağlamadığına bakalım.

Herhangi bir oyunu  $\Gamma(N, \Delta(S_i), u_i)$  ile temsil edebiliriz. Strateji setindeki bütün stratejilerin hepsi için sıfırdan büyük bir olasılık değeri tayin edelim, ve yeni strateji setini şöyle tanımlayalım.  $\Delta_e(S_i) = \{s_i : s_i(s_i) \geq e_i(s_i) \quad \forall s_i \in S_i \text{ ve } \sum_{s_i \in S_i} s_i(s_i) = 1\}$ .

Ayrıca,  $e_i(s_i) > 0$  ve  $\sum_{s_i \in S_i} e_i(s_i) < 1$ .

Yeni oyunumuz,  $\Gamma_e(N, \Delta_e(S_i), u_i)$  olsun.

Tanım: Sifıra giden bir epsilon serisinin herbirisinde gerçekleşen oyunların Nash dengesi, orijinal oyunun Nash dengesine yaklaşıyorsa, Normal gösterimle temsil edilen bir oyunun Nash dengesi aynı zamanda 'titreyen el mükemmel Nash dengesidir. Yani,  $\{e^k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow 0$  var ise, ve serideki her bir epsilon için ortaya çıkan yeni oyunlar

icin,  $\Gamma_{e^k}(N, \Delta_{e^k}(S_i), u_i)$ ,  $\{\mathbf{s}^k\}_{k=1}^{\infty} \rightarrow \mathbf{s}$  sarti saglaniyorsa, Orijinal oyunun Nash dengesi  $\mathbf{s}$  'titreyen el Nash dengesidir.'

Yukaridaki oyunda, (B,c) Nash dengesinin 'titreyen el Nash dengesi' olup olmadigina bakalim. Oyuncular icin iki ayri seri tanimlayalim. Bu seriler, Veli icin  $(e_n, 1-3e_n, 2e_n)$ , Ali icin  $(e_n, e_n, 1-2e_n)$  olsun. B Veli icin Ali'nin karistirilmis stratejisine en iyi karsiliktir cunku  $2e_n + e_n + 0*(1-2e_n) < 0*2e_n + e_n + (1-2e_n)$ . c Ali icin Veli'nin karistirilmis stratejisine en iyi karsiliktir cunku  $2e_n < 1-3e_n + 2e_n$  ve  $e_n + 1-3e_n < 1-3e_n + 2e_n$ . Dolayisiyla, (B,c) ayni zamanda 'titreyen el Nash dengesidir.'

### 3.2 Yaygin Gösterimde Çözümleme

#### Çok Asamali Oyun <sup>7</sup>

Ilk önce birkaç tanımla baslayalim. Yaygin gösterimle modellenen oyunlari birden fazla asamasi olduguna daha once deginmistik. K asamadan olusan bir oyun düşünelim. Oyunun ilk asamasini 0. asama olarak kabul edelim. Ilk asamada, her oyuncu  $A_i(h_0)$  tercih setinden eszamanli olarak strateji belirlemek durumundadir.  $h_0$  daha önceki asamalarda tercih edilen strateji profillerinin tarihini göstermektedir. 0. asamada,  $h_0 = \Phi$ 'dir. Her oyuncu asama sonunda diger oyuncularin tercih ettigi strateji seçeneklerini bildigi varsayilmaktadir.<sup>8</sup>  $a_0 = (a_{10}, \dots, a_{n0})$  0. asamada oyuncular tarafından tercih edilen stratejileri gösterebilir.  $A_i(h_1)$ , ikinci asamada oyuncularin tercih yapmak durumunda olduklari tercih setini göstermektedir. Her bir tercihin 0. asamadan gelen bir tarihi vardir. K asamadan olusan bir oyunun tarihi,  $h_{k+1} = (a_0, a_1, \dots, a_k)$ 'dir. Dolayisiyla,  $A_i(h_{k+1})$  herhangi bir oyuncunun k asamali bir oyunun sonunda karsi karsiya oldugu hareket stratejilerini göstermektedir.  $h_{k+1}$ , bu baglamda, k+1. asamadaki bütün muhtemel strateji tarihlerinin olusturdugu dizidir. Bir oyuncunun tekil stratejisi,  $h_k$  ise gösterilen strateji tarihinin her bir asamasinda tercih edecegi stratejilerinin bir planidir. Sayet  $H_k$  bütün strateji tarihlerini içine alan bir dizi ise,

<sup>7</sup> Bu bölüm (Füdenberg & Tirole (1993)'ten takip edilerek hazirlandi.

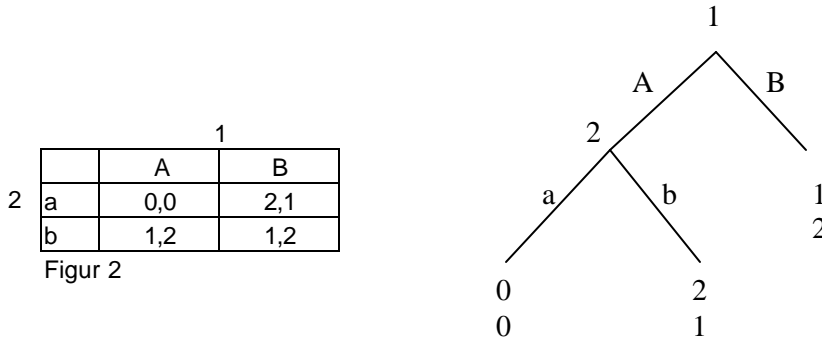
<sup>8</sup> Her asamada tek bir oyuncunun strateji tercih etmesi durumunda, diger oyuncularin 'hiçbirsey yapmama' stratejisini izledigi varsayilir.

$A_i(H_k) = \bigcup_{h \in H_k} A_i(h_k)$  oyuncunun karsi karsiya kaldigi hareket stratejilerinin bütünüdür. Bir oyuncunun tekil stratejisi, bütün  $h_k$ 'lar için,  $s_i^k(h_k) \in A_i(h_k)$ ,  $s_i^k$  dizisidir,  $k=0, \dots, K$ .

Herhangi bir strateji profilinin içerdigi hareket dizisini bulalım. 0. asamanin tercih secenekleri,  $a_0 = s_0(h_0)$ , 1. asamanin tercih secenekleri,  $a_1 = s_1(a_0)$ , 2. asamanin tercih secenekleri,  $a_2 = s_2(a_0, a_1)$ , ila ahir.... Bu strateji profilinin izledigi yoldur. Bitis noktaları 0. asamadan itibaren bütün strateji tercihlerini içine alır. Herbir oyuncunun getiri fonksiyonu,  $u : H_{k+1} \rightarrow \mathfrak{R}$ 'dur.

Tanım: Her bir strateji profilinin bir sonucu, ve her sonucun bir getirisi olduğuna göre,  $s_i^*$ , Nash Dengesi oyle bir strateji profilidir ki, diger hiçbir strateji profili ile daha iyi bir sonuç elde edilemez. Yani,  $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_{-i} \in S_{-i}$ . (Füdenberg & Tirole, 71-72)

Dolayisiyla, yaygin gösterimli oyunların Nash dengesi, bu oyunların normal gösterimi durumunda bulunacak Nash dengesidir. Bu tur bir strateji ile bulunacak Nash dengesinin ortaya çıkaracağı problemler vardır. Bunlardan en yaygin olanı, Nash sonucunun denge strateji tarihi üzerinde olmaması durumudur. Normal gösterimde bize Nash dengesini veren sonuc, yaygin gösterimde denge strateji tarihinin bir parçası olmayabilir ki, bu Nash çözümü için bir dezavantajdır. Aşğıdaki basit örnek bu problemi göstermektedir. Soldaki figür iki asamalı bir oyunun yaygin gösterimini, sağdaki figür ise aynı oyunun normal gösterimini çizmektedir.



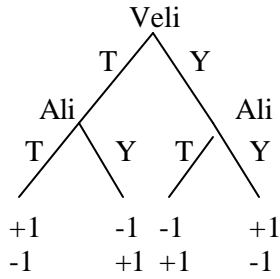
Soldaki oyunun iki Nash dengesi vardır: (A,b) ve (B,a). Fakat, 1. oyuncu B'yi tercih etmez, zira A'yı tercih ettiği durumda, 2. oyuncu b yi tercih edecektir. Dolayisiyla, (B,a) hiçbir zaman denge strateji tarihinin bir parçası değildir. Oyunun o bölümü oynanmayacaktır. Fakat, normal gösterimde o bölüm Nash dengesi olarak karsımıza çıkmaktadır.

Bu problemi gidermek için, yaygın gösterim için çözüm metodları geliştirilmiştir. En başta da belirttiğimiz üzere, bu çalışmada eksiksiz bilgi koşulunun sağlandığı yaygın gösterim oyunlarının çözümünü inceleyeceğiz. Eksik bilginin varlığı durumuna ilişkin çözüm metodlarının tanıtımını başka bir çalışmamıza bırakıyoruz.

#### Geriye Yönelik Tümevarım Çözümlemesi (GYTC)

Sınırlı sayıda aşaması, her aşamada sınırlı sayıda strateji seçeneği ve her aşamada sadece bir oyuncunun tercih yaptığı oyunlar için çözüm metodu, ‘geriye dönük tümevarımdır.’ Bu tür oyunlara ‘eksiksiz bilgi setine’ sahip oyunlar da denir. Bu çözüm metodunda, yaygın gösterimle modellenen oyunun en son aşamasında, K, yapılan tercihlerden başlanır. Buna göre, her bir  $h$  için son aşamada tercihi yapacak oyuncunun faydasını en azami hale getirecek tercihler belirlenir. K. aşamanın hareket stratejileri belirlendikten sonra, K-1. Aşamada, K. aşamada belirlenen hareket stratejileri göz önüne alınarak, tercihi yapacak oyuncunun hareket stratejileri belirlenir. Bu şekilde, geriye doğru oyunun ilk aşamasına ulaşılır, ve ilk tercihi yapacak oyuncunun seçeneği, daha sonraki strateji tercihlerinin öngörülen şeklinde gerçekleştirileceği varsayılarak, belirlenir. (Füdenberg & Tirole, 72)

Bir örnekle gösterelim. Daha önce çizmiş olduğumuz, aşağıdaki şekilde gösterilen Yazı-Tura oyununu çözelim.



Oyun iki aşamalıdır. İlk önce Veli tercihi yapar. Veli'nin tercihi bilen, Ali ikinci aşamada tercihi yapar. İkinci aşamada, Ali strateji tercihi nasıl kullanacaktır? Ali'nin karar vermesi gereken iki nokta vardır. Birinci noktaya Veli'nin T yi tercih etmesi durumunda ulaşılır; ikinci noktaya Veli'nin Y yi tercih etmişse ulaşılır. Veli'nin T yi tercih ettiğini düşünelim. Ali, T yi tercih ederse, Veli'ye 1 kurus ödeme yapar. Y'yi tercih ederse, Veli Ali'ye 1 kurus ödeme yapar. Dolayısıyla, Ali'nin tercihi Y olacaktır. Aynı argümanla, Ali'nin T yi tercih edeceği gösterilebilir. Oyunun akışı içerisinde, oklar denge strateji tarihini göstermektedir. GYTC oldukça basit ve güçlü bir çözüm metodu olmasına karşılık, oyunun aynı aşamasında oyuncuların aynı anda karar vermesi durumunu çözemez. Bunun için diğer bir çözüm metoduna bakalım.

## Alt-oyun Mükemmel Nash Dengesi

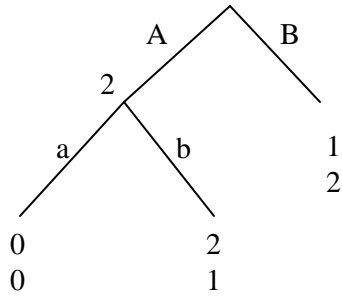
Alt-oyun kavramini yukarida açıklamistik. Kisaca, alt-oyun yaygın gösterimle modellenen bir oyunun alt kümesidir. Herhangi bir oyunun bütün özelliklerine sahiptir.

K asamali bir oyun düşünelim. Oyunun herhangi bir asamasında,  $n$  olsun, oyuncu  $n$  noktaya kadar olan oyunun tarihini,  $h_n$ , biliyordur.  $N$ . asamadan,  $K$ . asamaya kadar olan bölüm ise, kendi basına bir oyundur,  $G(h_n)$ . Bu oyunun getirilerini,  $u_i(h_{K+1})$  tanımlar.  $H_{K+1}$ ,  $N$ . asamadan,  $K$ . asamaya kadar tercih edilen hareketleri,  $a_1, \dots, a_K$  ve  $h_n$ 'i kapsar. Dolayısıyla,  $h_{K+1}=(h_n, a_1, \dots, a_K)$  olur. Yapılması gereken,  $h_n$  kısıtlaması altında, stratejileri belirlemektir. Yani,  $s | h_n$  belirlenecektir. (Füdenberg & Tirole, 73)

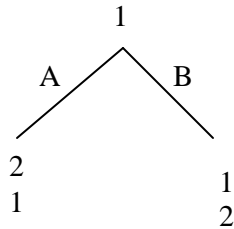
Tanım : Çok asamali bir oyunda, eger her bir  $h_n$  için, alt-oyunun,  $G(h_n)$ , strateji profili,  $s | h_n$ , Nash dengesi kosulunu sagliyorsa, alt-oyun mükemmel Nash dengesidir; (Füdenberg & Tirole, 74)

Diger bir deyisle, her bir alt-oyunda oyuncuların tercihleri Nash dengesini olustururlar. Herbir alt oyunda oyuncuların tercih ettikleri stratejiler, diger oyuncuların stratejilerine karsi en iyi stratejilerdir.

Bir örnekle açıklayalım. Yukarıda tartışmiş olduğumuz oyunu çözelim. Oyunun yaygın gösterimini tekrar çizelim.



Bu oyunda, 2. oyuncunun karar verme durumunda olduğu noktadan itibaren ki bölüm bir alt oyundur. Bu alt oyundaki Nash dengesi, 2. oyuncu için  $b$  yi tercih etmektir. Zira,  $b$  1. oyuncunun  $A$  tercihine karşı en iyi tercihtir. 1. oyuncunun karşı karşıya kaldığı oyunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.



A ile B arasinda tercih yapma durumunda olan 1. oyuncu, kendisine en fazla fayda saglayacak tercihi yapacaktır. Bu da, A'dir. Dolayisiyla, Altoyun Mukemmel Nash dengesi bize çözümler olarak sunu verir: Birinci asamada, 1. oyuncu A'yi tercih eder. İkinci asamada, 2. oyuncu b'yi tercih eder.

Böylelikle oyun teorisinin temel kavramlarının tanitilmasi bölümünü bitirmis olduk.

#### 4. Mahkumun İkilemi

##### 4.1 İkilemin Tanıtımı ve Çözümü

Mahkumun ikilemi, hirsizlik suçlamasıyla polis tarafından alikonan iki tutuklunun durumunu anlatır. Savcı tutuklulardan suçlarını itiraf etmelerini ister. Her iki tarafta itiraf edip, adaletin gerçekleşmesine yardımcı olurlarsa hapis müddetinde indirim yapılacaktır. Her iki tarafında itiraf etmemesi durumunda, dava müddetince her iki tarafta hapiste kalacaktır. Tutuklulardan birisinin itiraf etmesi durumunda, itiraf eden serbest bırakılacak, itiraf etmeyen cezası katlanacaktır. Hirsizlik cezasının 5 yıl cezası olduğunu düşünelim. Her iki taraf itiraf ettiğinde, ceza 3 yıla inecektir. Her iki tarafta itiraf etmezse, davanın süreceği 1 yıl hapiste geçirilecektir. Bir tarafın itiraf etmesi durumunda, itiraf etmeyen 6 yıl cezalandırılacak, itiraf eden ise saliverilecektir. Bu oyunda her iki mahkumun bir araya gelip, itiraf etmeme kararı almaları durumunda dahi, sonuç her iki mahkumunda suçunu itiraf etmesidir. İsbirliginin mümkün olmadığı, verilen sözlerin yerine getirilmesine yönelik herhangi bir yaptırımın uygulanmadığı bu tür oyunlar, ‘isbirliginin mümkün olmadığı oyunlar’ başlığı altında değerlendirilir. Aşağıdaki tabloda gösterilen oyun, Mahkumun İkilemi oyunudur.

		1	
		C	D
2	C	2,2	0,3
	D	3,0	1,1

İki oyuncu arasında bir kez oynanan, mahkumun ikilemi oyununun oyuncularları için D stratejisi baskın stratejidir.

$$u_i(D, s-i) > u_i(C, s-i), \quad i = 1, 2 \text{ ve } s-i = C, D$$

Dolayısıyla, bu ikilemin sonucu (D,D) strateji dizisidir.

Mahkumun ikileminin sonucu şaşırıdır, zira her iki oyuncu için daha çok fayda sağlayacak bir strateji dizisi mevcuttur: (C,C). Yani,  $u_i(C,C) > u_i(D,D)$ ,  $i=1,2$ . Diğer bir deyişle, mahkumun ikileminin sonucu Nash dengesidir, fakat Pareto optimal değildir.

##### 4.2 İkilemin Tekrarlanması

“Tarih tekerrürdür.”

Mahkumun ikileminin sınırlı sayıda tekrarlanması ve sonsuz kez tekrarlanması durumlarının sonucu nasıl etkileyeceğine bakalım. Aynı durumun tekrarlanması

oyunculara, geçmiş asamalarda karsi taraftaki oyuncunun strateji tercihini cezalandirma veya mükafatlandırma imkani vermektedir.

Her oyunda oyuncunun nihai amacinin, faydasini azamilestirmek oldugunu söylemistik. Dolayisiyla, ilk önce herbir oyuncu için tekrarlanan bir oyunda fayda fonksiyonunu belirleyelim. Gelecekte oynanacak oyundan elde edilecek faydanin bugün ki degerini bulabilmek için bir  $\delta$  iskonto degeri belirleyelim.  $0 < \delta < 1$ . Dolayisiyla, sonsuz kez tekrarlanan bir oyunda

$$U_i = (1 - \mathbf{d}) \sum_{t=0}^{\infty} \mathbf{d}^t u_i(a^t)$$

fonksiyonu bize normallestirilmis fayda fonksiyonunu verir. Notasyona iliskin hatirlatma yaparsak  $a^t$  t asamasinda tercih edilen hareketi,  $g_t(a^t)$  elde edilen faydayi gösterir. Oyunun sinirli sayida tekrarlanmasi durumunda ise, T kere diyelim, yukaridaki formüldeki  $\infty$ 'in yerine T konulur.

#### Sinirli Sayida Tekrarlanma

T= 3 olsun. Alt oyun mükemmel Nash dengesi çözümlemesini uygulayalim. Son asamadan baslayarak tekrarlanan her oyun bir alt oyundur. Son asamada alt-oyunlar çözümlendikten sonra, bir önceki asamada ki alt oyun çözümlenip, oyunun basinda iki oyuncunun tercihleri belirlenecektir. 3. Asamanin hemen basinda oyuncularin karsi karsiya kaldiklari nokta sayisi 64 tanedir.<sup>9</sup> Bu 64 noktanin herhangi birinden baslayan son oyun, bir alt oyundur. Bu alt oyunun alt-oyun mükemmel Nash dengesi, her iki oyuncu içinde D stratejisidir.

$$u_i(D, s_{-i} | h_3) > u_i(C, s_{-i} | h_3)$$

Son asamaya kadar bütün asamalarda A stratejisinin tercih edildigini varsayalim.<sup>10</sup>

$H_3 = (a_0, a_1, a_2)$  olsun. Son asamada, B stratejisini oynamanin saglayacagi fayda ile A stratejisini oynamanin saglayacagi faydayi karsilastiralim.

$$\begin{aligned} U_i(D, s_{-i} | h_3) &= (1 - \mathbf{d}) \sum_{t=0}^3 \mathbf{d}^t u_i(a^t) \\ &= (1 - \mathbf{d})[(\mathbf{d}^0 * 2) + (\mathbf{d}^1 * 2) + (\mathbf{d}^2 * 2) + (\mathbf{d}^3 * 3)] \end{aligned}$$

$$U_i(C, s_{-i} | h_3) = (1 - \mathbf{d})[(\mathbf{d}^0 * 2) + (\mathbf{d}^1 * 2) + (\mathbf{d}^2 * 2) + (\mathbf{d}^3 * 2)]$$

<sup>9</sup> 0. Asama sonra erdiginde 4, 1. Asama sonra erdiginde 16 ve 2. Asama sonra erdiginde 64 nokta olur.

<sup>10</sup> A stratejisinin tercih edildigini varsaydik, zira her iki oyuncunun son asamaya kadar A stratejisini tercih etmesi, ve böylece daha çok fayda saglamasi daha iyi bir seçenek gibi görünmektedir. Sonuç olarak, göstermeye çalistigimiz bütün asamalarda A'nin tercih edilmeyecegini göstermektedir.

$U_i(D, s_{-i} | h_3) - U_i(C, s_{-i} | h_3) = (1-d)d^3(3-2) > 0$  Dolayısıyla, son asamada diger oyuncunun C stratejisini oynayacağı veri iken, herhangi bir oyuncunun D stratejisini oynamak daha fazla fayda sağlayacaktır. Simetri kuralıyla, (D,D) stratejisi, alt-oyun mükemmel Nash dengesidir.

Son asamada her iki oyuncunun D stratejisini seçeceğini göstermiş olduk. 2. asamaya dönelim. İkinci asamada her iki oyuncu içinde, yukarıdaki aynı argümanı kullanarak D stratejisinin en iyi strateji olduğunu gösterebiliriz. Aynı çözümleme metodunu devam ettirirsek, 0. asamada da (D,D) stratejisinin bütün oyun için alt-oyun mükemmel Nash dengesi olduğu ortaya çıkar. Dolayısıyla, oyunun çözümü her asamada, (D,D) alt oyun mükemmel Nash dengesidir.

Sınırlı sayıda tekrarlanan mahkumun ikilemi oyununun sonucu, bir kez oynanan oyundan farklılık göstermemektedir. Asama sayısı ne kadar çok artırılsa artırılsın sonuç değişmeyecektir. Halbuki, her iki oyuncunun bütün asamalarda A stratejisini tercih etmesi durumunda her iki oyuncunun faydası daha fazla olacaktır. Diger bir deyişle, sınırlı sayıda tekrarlanan mahkumun ikilemi oyununun sonucu Nash dengesidir, fakat Pareto optimal değildir. Aynı oyunun 100 kez tekrarlanması durumunda C stratejisini tercih etmemeden doğan kayıp, daha da büyük olacaktır.

Alt-oyun Nash dengesi ve Geriye dönük tümevarım yönteminin uygulanması durumunda, sonucun her iki oyuncu içinde olumsuz sonuçlanması durumu ve deneysel çalışmaların bu sonucu desteklememesi, (Kreps, 1990: 78)<sup>11</sup> Oyun teorisinin temel varsayımlarında temel paradigmayı sarsmayacak şekilde, değişiklikler yapılmasına sebep olmuştur. Bunların en önemlisi, oyuncuların 'itibar kurma' stratejisi izlediklerine ilişkin varsayımdır.<sup>12</sup> (Heap & Varoufakis, 178)

Oyunda asama sayısı arttıkça, oyuncuların 'itibar kurma' isteği o kadar yüksek olacaktır. Sınırlı sayıda tekrarlanan oyunların çözümüne ilişkin olarak tanıtılan 'itibar kurma' stratejisi, her bir oyuncunun karşısındaki oyuncunun işbirliği yapmaya eğilimli oyuncular olma ihtimali üzerine kurulmuştur. 'İtibar kurma' stratejisi, sınırlı sayıda tekrarlanan mahkumun ikilemine tanıtıldığı duruma göz atalım. İşbirliği yapma eğilimli oyuncunun ilk asamada 'itibar kurma' strateji doğrultusunda, C stratejisini tercih ederek başladığını, takip eden asamalarda ise, karşısındaki oyuncunun strateji

<sup>11</sup> Kreps (1990) Geriye dönük tümevarım'ın oyuncular için olumsuz neticelendiği, Rosenthal (1980)'in kurmuş olduğu 'centi-pede' oyunu örnek göstermektedir. Yapılan deneylerde bu oyunun sonucunun genellikle geriye dönük tümevarımın öngördüğü çözüm olmadığı ortaya çıkmıştır. Kreps (1990) devamında, işbirliği ruhlu bir oyuncuyu oyuna tanıtmış, ve çözümlemesini tamamlamıştır.

<sup>12</sup> İtibar kurma stratejisine ilişkin çözüm, Heap & Varoufakis (1995:178-183)'ten uyarlanmıştır.

tercihinin aynısını tercih edeceğini kabullenelim. Herhangi bir oyuncunun karsısındaki oyuncunun, isbirliği yapma eğilimli oyuncu olacağına dair beklentisinin  $p$ , her oyunda altoyun mükemmel Nash dengesini izleyen islevsel akıllı bir oyuncu olma ihtimalinin  $(1-p)$  olarak belirlediğini varsayalım. Islevsel akıllı bir oyuncunun, karsısındaki oyuncunun isbirliği yapma eğilimli bir oyuncu olduğunu düşünmesi ve oyunun ilk aşamalarında bundan faydalanabilmek için,  $r$  ihtimali ile  $C$ 'yi tercih edeceğini,  $(1-r)$  ihtimallede  $D$ 'yi tercih edeceğini varsayalım. Çözümlemeyi basitleştirmek için, iskonto oranı kullanmayacağız, ve 2. oyuncunun islevsel akıllı olduğunu, 1. oyuncunun ise 'isbirliği yapma eğiliminde' olan oyuncu olduğunu varsayalım.<sup>13</sup>

Oyunun son aşamasında, 2. oyuncu, 1. oyuncunun tercihinden etkilenmeksizin,  $D$  stratejisini tercih eder. Sınırlı sayıda tekrarlanan oyunların çözümünde kullandığımız alt-oyun mükemmel Nash dengesi kullanılarak bu sonuç elde edilebilir. 1. oyuncunun tercihi bir önceki aşamada 2. oyuncunun tercihine göre değişir. Sayet 1. oyuncu isbirliğine eğilimli bir oyuncu ise, bir önceki aşamada, 2. oyuncu  $C$ 'yi tercih etmişse  $C$  stratejisini,  $D$ 'yi tercih etmişse,  $D$  stratejisini tercih edecektir. 1. oyuncunun islevsel olarak akıllı olduğu durumda ise, 1. oyuncu son aşamada, 2. oyuncunun tercihinden etkilenmeksizin,  $D$  stratejisini tercih edecektir.

Oyunun 1. aşamasında 2. oyuncunun  $D$  stratejisini tercih etmesi için,  $D$  stratejisini tercih etmekten elde edeceği faydanın,  $C$  stratejisini tercih etmekten elde edeceği faydadan daha fazla olması gerekir. Bunun hangi koşullarda sağlayacağını belirlemek için, oyunun 0. aşamasında her iki oyuncununda  $C$  stratejisini tercih ettiğini varsayalım.<sup>14</sup> Bu varsayım doğrultusunda, 2. oyuncunun 1. aşamada  $C$  stratejisini tercih etmekten elde edeceği fayda beklentisi,

$$\begin{aligned} E[U_2(C | h_1)] &= 2 + 2 * p + 0 * (1 - p) + 3 * p + 1 * (1 - p) \\ &= 4p + 3 \end{aligned}$$

Açıklama : Varsayım gereği, her iki oyuncuda oyunun 0. aşamasında  $C$  stratejisini tercih ederler, ve elde ettikleri fayda 2 olur. Oyunun 1. aşamasında, 1. oyuncu isbirliğine eğilimli ise,  $p$  olasılıkla 2. oyuncu  $C$  stratejisini tercih etmekle 2 fayda elde eder. Öte yandan, 1. oyuncu islevsel akıllı ise,  $1-p$  olasılıkla, 2. oyuncu 0 fayda elde edecektir. Oyunun 2. aşamasında, 1. oyuncu isbirliğine eğilimli ise,  $p$  olasılıkla 2.

<sup>13</sup> Her iki oyuncuyu 'isbirliği yapma eğiliminde' oyuncular olarak kabul edersek, sınırlı sayıda tekrarlanan oyunun çözümü kolaydır : her aşamada  $A$  stratejisi tercih edilir.

<sup>14</sup> Bu varsayımın geçerli olmadığı durumda, 1. aşamada  $A$  stratejisi hiçbir koşulda tercih edilmez.

oyuncu D stratejisini tercih edecektir, ve 3 fayda elde edecektir. Öte yandan 1. Oyuncu islevsel akıllı ise,  $1-p$  olasılıkla 1 fayda elde edecektir. Aynı mantıkla, 2. oyuncunun D stratejisini tercih etmekten elde edeceği beklenen faydayı hesaplayabiliriz.

$$\begin{aligned} E[U_2(D|h_1)] &= 2 + 3 * p + 1 * (1 - p) + 1 \\ &= 2p + 4 \end{aligned}$$

2. oyuncunun C stratejisini tercih etmesi için,

$E[U_2(C|h_1)] - E[U_2(D|h_1)] > 0$  şartının sağlanması gerekmektedir. Bunun için,

$$4p + 3 - 2p - 4 = 2p - 1 > 0$$

Sayet,  $p > \frac{1}{2}$  ise, 2. oyuncu için, C stratejisini tercih etmenin fayda beklentisi D'den daha fazla olacaktır. Dolayısıyla, 1. asamada C stratejisinin tercih edilebilmesi için, oyuncuların birbirleri hakkında 'isbirliği eğilimlerine' ilişkin beklentileri,  $p$ , % 50'den daha fazla olması gerekmektedir.

Oyunun ilk aşamasında her iki oyuncunun C stratejisini tercih etmeleri için gerekli olan şartları belirleyelim. 1. oyuncunun 0. asamada C stratejisi tercih etmesinin iki sebebi olabilir. Birincisi,  $p$  ihtimalle 1. oyuncu isbirliği eğilimli bir oyuncudur, ve C stratejisini tercih edecektir. İkincisi, 1. oyuncu  $(1-p)$  ihtimalle islevsel akıllı bir oyuncudur, ve ilk asamada  $r$  ihtimalle C stratejisini tercih ederek, 2. oyuncunun kendisi hakkında sahip olduğu  $p$  ihtimalini artırıp, 2. oyuncunun C stratejisini tercih etmesini sağlayacaktır. Böylece 1. asamada D stratejisini tercih ederek faydasını azamilestirmeye çalışacaktır. 2. oyuncunun oyunun 0. aşamasında D stratejisini tercih etmesi için, her zaman olduğu gibi,  $E[U_2(D|h_0)] > E[U_2(C|h_0)]$  şartının sağlanması gerekir.

$$\begin{aligned} E[U_2(D|h_0)] &= p * (2 + 2 + 3) + (1 - p) * r * (2 + 0 + 1) + (1 - p - (1 - p)r) * (0 + 1 + 1) \\ &= 5p + r - pr + 2 \end{aligned}$$

Açıklama : 2. oyuncu 1. oyuncunun isbirliğine eğilimli olması durumunda, yani  $p$  ihtimalle, (2,2,3) fayda dizisini elde edecektir. 1. oyuncunun islevsel akıllı olması durumunda, bu oyuncunun  $(1-p)r$  ihtimalle C stratejisini tercih etmesi durumunda (2,0,1) fayda dizisini elde edecektir. 1. oyuncunun islevsel akıllı olması,  $(1-p)$  ihtimalle, ve 0. asamada D stratejisini tercih etmesi,  $(1-r)$ , durumunda, her ikisi  $(1-p)(1-p)r$  ihtimaliyle gerçekleşir, 2. oyuncu (0,1,1) fayda dizisini elde edecektir. Aynı mantıkla,

$$E[U_2(C | h_0)] = p * (3+1+1) + (1-p) * r * (3+1+1) + (1-p - (1-p)r) * (1+1+1)$$

$$= 2p + 2r - 2pr$$

$$E[U_2(D | h_0)] - E[U_2(C | h_0)] > 0$$

$$= 5p + r - pr + 2 - 2p - 2r + 2pr > 0$$

$$r < \frac{(3p-1)}{(1-p)}$$

Yukarıda, 2. oyuncunun 1. asamada C stratejisini tercih etmesi için,  $p=1/2$  olması gerektiğini bulmştuk. Yukarıdaki formülde yerine koyduğumuzda,  $r < 1$  elde ederiz. Bunun anlamı şudur : 1. oyuncunun işbirliğine eğilimli olma ihtimali en az % 50 ise, 2. oyuncunun  $r$  ihtimaline ilişkin beklentisi ne olursa olsun, 2. oyuncu 0. asamada C stratejisini tercih edecektir.

Özetlersek, sınırlı sayıda tekrarlanan mahkumun ikilemine ‘işbirliği yapma’ eğiliminde olan bir oyuncunun tanıtılması, geriye dönük tümevarım ve alt-oyun Nash dengesinin öngördüğünden farklı olarak, yeni bir olasılık getirmiştir. Bu olasılığa göre, herhangi bir oyuncu karşısındaki oyuncu hakkında işbirliği yapma ihtimalini yüksek gördüğü durumda oyunun ilk aşamasında oyuncuların Pareto optimal sonucu elde etmeleri mümkündür. Oyunun aşaması arttıkça, işbirliğine eğilim ihtimali daha da fazla artacaktır.

Sonsuz Sayıda Tekrarlanma<sup>15</sup>

Mahkumun ikilemi oyununun hem tek asamada hemde birden çok fakat sınırlı sayıda aşamalı tekrarlanmasında D stratejisini tercih eden bir oyuncuya karşı tercih edilecek en iyi stratejinin D stratejisi olduğunu söylemistik.

(D,D) strateji dizisi ikilemin sonsuz sayıda tekrarlanması durumunda da Nash dengesi olması özelliğini korur. Zira, D stratejisini tercih eden bir oyuncuya karşı tercih edilebilecek en iyi strateji yine D stratejisidir. (D,D) strateji dizisini oligopol piyasalardan ilhamla ‘Cournot çözümü’ olarak tanımlayalım,  $S^c = (s_1^c, s_2^c)$ . Cournot stratejisi sonsuz sayıda tekrarlanan oyunun her bir aşamasında oyuncuların  $S^c$  stratejisini tercih etmesi olarak tanımlanır.

Sonsuz sayıda tekrarlanan oyunlar için yeni bir strateji seti tanımlayalım.

$$B = \{s \mid s \in S, u_i(s) \geq u_i(s^c)\}$$

<sup>15</sup> Bu bölüm Friedman’dan hazırlanmıştır.

Dolayısıyla, B seti Cournot çözümünden daha fazla fayda sağlayani dizilerini içermektedir. Bu stratejilerden birisi,  $s' \in B$  olsun. Herhangi bir oyuncunun asagida tanımlanan stratejiyi takip ettigini varsayalım.

$$(1) S_i^0 = s'_i$$

$$(2) \text{Eger } s_j^r = s'_j \text{ ise } S_i^t = s'_i, j \neq i, r = 0,1,..t-1, \text{ ve } t = 0,1,2..$$

Eger (2) gerceklesmemisse,

$$(3) S_i^t = s_i^c$$

Yani,  $s' \in B$  stratejisi, herhangi bir oyuncu için oyunun ilk asamasında  $s' \in B$  stratejisini tercih etmesini, ve karsi taraftaki oyuncu ayni strateji dizini izlemisse sonsuza kadar  $s' \in B$  stratejisinin izlenmesini öngörür. Eger karsi taraftaki oyuncu oyunun herhangi asamasında farklı bir tercih yapmissa, sonsuza kadar  $s^c$  stratejisinin izlenmesini ongorur.

$s' \in B$  'nin vektörünün denge çözümü olabilmesi için,

$$\sum_{r=0}^{\infty} d^r u_i(s') > u_i(t_i, s_{-i}) + \sum_{r=1}^{\infty} d^r u_i(s^c), i=1,2,..,n.$$

veya

$$\frac{d}{(1-d)} [u_i(s') - u_i(s^c)] > u_i(t_i, s_{-i}) - u_i(s')$$

$$t_i \text{ 'yi tanımlarsak. } t_i \in S \text{ ve } t_i = \arg \max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$$

Yani, ilk dönemde  $s' \in B$  stratejisini tercih eden bir oyuncuya karsi,  $t_i$  stratejisi izlenmesi ile elde edilecek getiri ile daha sonraki dönemde her oyuncunun Cournot stratejisini izlemesi sonucu elde edilecek getiri akiminin toplami, bütün asamalarda  $s' \in B$  stratejisinin izlenmesi sonucu elde edilecek getiriden daha az ise,  $s' \in B$  stratejisi denge çözümü olmaktadır. Öte yandan bu sonuç, oyuncuların iskonto oranına bağlıdır. Iskonto oranı 1'e yaklaştıkça, oyuncular için  $s' \in B$  stratejiden elde edilecek kazanç sonsuza giderken, bir dönemde  $s' \in B$  oynayan bir oyuncuya karsi  $t_i$  stratejisi izleme sabit kalacak ve degismeyecektir. Dolayısıyla,  $t_i$  stratejisinin denge çözümü olabilmesi için gerekli şart,

$$\frac{d}{(1-d)} [u_i(s') - u_i(s^c)] > u_i(t_i, s_{-i}) - u_i(s') \text{ olmaktadır. Bu analiz çerçevesinde}$$

örnegimize baktığımızda, (C,C) strateji dizisi pareto optimal denge olarak karsımıza her oyuncunun iskonto degerinin  $\delta > 1/2$  olması gerekmektedir.

(C,C) strateji dizisinin sonsuz sayıda tekrarlanan oyunda elde edilebilecek muhtemel bir getiri noktası olduğunu göstermiş olduk. Öte yandan her bir asamada (D,D) strateji dizisinin tercih edilmesi de, ayrı bir denge noktası oluşturmaktadır. Oyunun herhangi bir aşamasında Cournot stratejine dönülüp, daha sonraki aşamalarda Cournot stratejinin izlenmesi ihtimalide vardır. Kisaca, sonsuz sayıda strateji dizisi ihtimali vardır. Figür sonsuz sayıda tekrarlanan oyunlarda elde edilecek muhtemel ortalama iskonto edilmiş getiri oranlarını göstermektedir. Dolayısıyla, oyunun muhtemel getiri noktalarının birleştirilmesiyle oluşturulmuş ACBD dörtgeni oyunun sonsuz kez tekrarlanması sonucu elde edilebilecek denge noktalarının setidir. Sonsuz sayıda tekrarlanan oyunların bu özelliğine ‘Folk Teoremi’ ismi verilir. Yani ACBD dörtgeninde gösterilen her nokta Nash dengesi olarak sağlanabilir.

Oyuncu sayısının ikiden fazla,  $n$  sayıda diyelim, oyuncunun birbirleriyle mahkumun ikilemi oyununu oynamaları durumunda da benzer çıkarım elde edilecektir : ‘mahkumun ikilemi’ oyunu ile temsil edilebilecek herhangi bir sosyal oyun birçok noktada dengeye gelebilir.  $N$  sayıda oyuncunun mahkumun ikilemi oyunuyla karşı karşıya kaldıkları durum ‘Kamu Mallarının Trajedisi’ olarak da isimlendirilir. Garret Hardin, köylüler tarafından ortak kullanılan bir meranın her köylünün istedikleri kadar çok koyunu otlatmaları sonucu yok olmasını örnek gösterir. Meranın bir tek sahibi olsaydı sayet, bir günde merada otlatacağı koyun sayısı  $N$  olacaktı. Dolayısıyla, Pareto optimal olan strateji kamu mali olan merada köylülerin herbiri  $N/n$  kadar koyun otlatmalarıdır. (Binmore, 1995:111) Mahkumun ikileminin  $n$  sayıda oyuncu arasında sonsuz kez tekrarlanması neticesinde de muhtemel bir Nash dengesi yine (D,D) strateji dizisidir.  $N$  tane bireyin davranışlarının koordinasyonunu sağlayacak kurum veya geleneklerin gelişmesi, 2 oyuncunun işbirliğini sağlayabilmelerinden daha zor olduğu aşıkardır, dolayısıyla (D,D) strateji dizisinin denge strateji dizisi olarak ortaya çıkması ihtimali  $N$  sayıda birey tarafından oynanan oyunda daha yüksektir.

Folk teoremi analizimizin içinden çıkılmaz bir boyuta geldiği şeklinde yorumlanabilir. Farklı bir bakış açısıyla, mahkumun ikilemi ile temsil edilebilecek her sosyal hadisenin sonsuz kez tekrarlanması hadisenin denge noktasının nerede oluşacağını kestirmenin mümkün olmadığı şeklinde yorumlamakta mümkündür. Bu sonucu kullanarak, Ken Binmore ve Roger Myerson devletin ortaya çıkış sebebinin  $n$  bireyli toplumlarda Pareto optimal dengenin sonsuz sayıda tekrarlanan oyunlarda sağlanması olarak açıklamaktadır. Gerçi her ikisinde, Cinsiyetlerin savaşı oyununu kullanmıştır.

Fakat o oyunda sonsuz kez tekrarlanması aynı neticeyi vermektedir. Mahkumun ikilimini oyunda kullanılabılırdı. Bu tür bir sonuç, kurumların ortaya çıkmasını, piyasalardaki etkinlik prensibine göre açıklamaya çalışılan 'market efficiency theory'de de kullanılmıştır. Dolayısıyla, çıkılmaz zannettiğimiz durum, sosyal bilimlerde birçok teoremin ana fikrini desteklemiştir.

#### Kaynaklar

- Shaun P. Hargreaves Heap and Yanis Varoufakis, "Game theory : a critical introduction," London ; New York : Routledge, 1995
- John C. Harsanyi, "A General Theory of Rational Behavior in Game Situations," *Econometrica*, Vol. 34, No. 3. (Jul., 1966), pp. 613-634
- David M. Kreps, "Game theory and economic modeling," Oxford : Clarendon Press ; New York : Oxford University Press, 1990
- Drew Fudenberg, Jean Tirole, "Game theory," Cambridge, Mass. : MIT Press, 1991
- Ken Binmore, "Game theory and the social contract," Cambridge, Mass. : MIT Press, 1995
- Roger Myerson, "The Fundamentals of Social Choice Theory" Kellogg Math Center, Working Paper
- Michael Whinston, Microeconomic Theory-3 Ders Notları
- James Friedman, *Econometrica*, Vol. 49, No. 4. (Jul., 1981) , pp. 1087-1088.